1i) Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων στο $I = [0, \infty)$ το π.α.τ.

$$y' = e^x \sqrt{1 + ax^2 + by^2}, \quad y(0) = 0 \quad (a, b > 0).$$

Υπόδ: **Θ. 3**, σελ. 20. Αν J συμπαγές υποσύνολο του I με άνω φράγμα M_J τότε είναι $|\frac{\partial f}{\partial y}| = \frac{e^x b|y|}{\sqrt{1+ax^2+by^2}} \leq \frac{e^x b|y|}{\sqrt{1+by^2}} \leq e^x \sqrt{b} \sqrt{\frac{by^2}{1+by^2}} \leq e^{M_J} \sqrt{b}$.

1ii) Να εξετασθούν ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων τα π.α.τ.

$$y' = e^x y^{2/3}; \quad y(0) = 0, \quad y(0) = 2018.$$

Υπόδ: Το πρώτο π.α.τ. έχει την μηδενική λύση και (τουλάχιστον) μια μη μηδενική λύση που προκύπτει από επίλυση της εξίσωσης με ολοκλήρωση (χωριζομένων μεταβλητών). Για το δεύτερο εφαρμόζουμε το **Θ.1**, σελ. 12-13 και θεωρούμε το $R = [-1, 1] \times [2017, 2019]$ όπου $|\frac{\partial f}{\partial y}| = \frac{2e^x}{3y^{1/3}} \leq \frac{2e}{3 \times 2017^{1/3}}$.

1iii) Να διατυπωθούν οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στα ερωτήματα i), ii).

2i) Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $y(x) = \int_0^x y(t)[ty(t) - 1]dt - 1, x \geq 0$.
Υπόδ: **Άσκηση Α-13**, Φυλ. λυμένων ασκήσεων σελ. 9-10.

(*) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί η πρόταση σχετικά με την μέθοδο μεταβολής των σταθερών για μια γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης.
Υπόδ: **Θεωρ. 14**, σελ. 86-87.

3i) Για μια γραμμική δ.ε. δεύτερης τάξης να δοθούν οι ορισμοί α) ομαλού σημείου β) ανώμαλου σημείου γ) κανονικού ανώμαλου σημείου.
Υπόδ: **Ορισμοί,** σελ. 232-233.
Να βρεθούν τα ομαλά σημεία, τα κανονικά ανώμαλα σημεία και τα μη κανονικά ανώμαλα σημεία της διαφορικής εξίσωσης $(x^4 - x^2)y'' + |x + 1|y' + x^2(x - 1)y = 0, x \in \mathbb{R}$.
Υπόδ: **Παραδ. 1.2,** σελ 233. Η $|x + 1|$ δεν παραγωγίζεται στο -1.

3ii) Να εξετασθεί αν η εξίσωση $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0$, έχει πολυωνυμική λύση.
Υπόδ: **Εξίσωση Legendre** τάξης 5, σελ. 266-71. Επιλέγοντας $x_0 = 0$ που είναι ομαλό σημείο, από την αναδρομική σχέση προκύπτει αμέσως ότι για $n = 5$ έχουμε $c_7 = 0$ που συνεπάγεται $c_{2n+1} = 0, n \geq 3$, και συνεπώς δεν απαιτείται περαιτέρω εργασία (π.χ. εύρεση αναδρομικού τύπου ή δεύτερης λύσης).

4) Να επιλυθεί η γ.δ.ε. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 1 + x, \quad x > -1$, με $p, q \in C((-1, \infty))$ αν είναι γνωστό ότι μια λύση της ομογενούς είναι η $y_1(x) = (1 + x)^2, x > -1$ και ότι η ορίζουσα Wronski δύο οποιωνδήποτε λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης είναι σταθερή.
Υπόδ: **Άσκηση Β-13**, σελ. 25, Φυλλάδιο λυμένων ασκήσεων.
Άλλος τρόπος (διαλέξεις): Αν y_2 είναι μια λύση της εξίσωσης ώστε το σύνολο $\{y_1, y_2\}$ να είναι βασικό, τότε από την ορίζουσα Wronski και την υπόθεση ότι $W(y_1, y_2)(x) = k \neq 0$ προκύπτει μια γ.δ.ε. πρώτης τάξης με άγνωστη συνάρτηση την y_2 που επιλύεται κατά τα γνωστά. Μια μερική λύση της εξίσωσης έπεται από το Θ. 14 (μεταβολής των σταθερών) ή τον τύπο του Θ. 15, σελ. 89.

5. Θεωρούμε την ομογενή γ.δ.ε., $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, x \in I, a_0, a_1, a_2 \in C(I), a_2(x) \neq 0, x \in I.$

5i) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση γράφεται στη μορφή $(py')' + qy = 0.$
Υπόδ: Πολλαπλασιάστε με $exp(\int \frac{a_1}{a_2})$ την $y'' + \frac{a_1}{a_2}y' + \frac{a_0}{a_2}y = 0.$
Αν y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης, να αποδειχθεί ότι:
5iia) Οι y_1, y_2 δεν έχουν κοινή ρίζα.
Υπόδ: Αν έχουν κοινή ρίζα x_0 τότε θα είναι $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$, άτοπο.
5iib) Μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της y_2.
Υπόδ: **Θεωρ. 29**, σελ, 125. (Εφαρμογή του Θ. Rolle για την συνάρτηση y_1/y_2).

6i) Να λυθεί η εξίσωση $L(y) : y'' + ky = 0$ για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$.
Υπόδ: Με χρήση των ριζών του χ. π. προκύπτει ότι ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι : α) για $k = 0$ το $\{1, x\}$ β) για $k > 0$ το $\{cos\sqrt{k}x, sin\sqrt{k}x\}$, γ) για $k < 0$ το $\{e^{\sqrt{|k|}x}, e^{-\sqrt{|k|}x}\}$.

6ii) Για $k = w^2, w \neq 0$ να λυθεί η εξίσωση $L(y) = cos(wx), x \in \mathbb{R}$ και να εξετασθεί αν υπάρχουν φραγμένες λύσεις της στο $[0, \infty)$.
Υπόδ: **Άσκηση B-20**, σελ. 31 φυλλάδιο λυμένων ασκήσεων.

(6*) Να λυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών $L(y) = 0, \quad y(0) = 0, y'(\pi) = 0.$
Υπόδ: **Παράδειγμα 5**, σελ. 134.